SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT NĂM HỌC 2020 - 2021
KHÓA NGÀY 16/7/2020
Môn thi chuyên : TOÁN; Ngày thi: 17/7/2020
Thời gian làm bài: 150 phút *(không kể thời gian phát đề)*

Câu 1. $(1,0$ *điểm*$)$

Cho ba số dương a,b,c thỏa mãn điều kiện $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}=2020$

Tính giá trị của biểu thức $P=\left(\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b^2}{c+a}+\dfrac{c^2}{a+b}\right):\ a+b+c$

Câu 2. $(2,5$ *điểm*$)$

a) Giải phương trình: $\sqrt{2x^2+x+9}+\sqrt{2x^2-x+1}=x+4$

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y^2-2xy=8x^2-6x+1 \\ y^2=x^3+8x^2-x+1 \end{cases}$

Câu 3. $(1,5$ *điểm*$)$

Cho tam giác nhọn ABC $(AB<BC<CA)$ nội tiếp đường tròn (O). Từ A kẻ đường thẳng song song với BC cắt (O) tại A_1. Từ B kẻ đường thẳng song song với AC cắt (O) tại B_1. Từ C kẻ đường thẳng song song với AB cắt (O) tại C_1. Chứng minh rằng các đường thẳng qua A_1, B_1, C_1 lần lượt vuông góc với BC, CA, AB đồng quy.

Câu 4. $(2,0$ *điểm*$)$

a) Cho 2 số thực a, b. Chứng minh rằng: $\dfrac{a^2+b^2}{2}\ge ab+\dfrac{(a-b)^2}{a^2+b^2+2}$

b) Cho hai số dương a,b thỏa mãn điều kiện $a+b\le 3$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $Q=b-a+\dfrac{20}{a}+\dfrac{7}{b}$

Câu 5. $(2,0$ *điểm*$)$

Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh $AB,\ BC,\ CA$ lần lượt tại D, E, F. Kẻ đường kính EJ của đường tròn (I). Gọi d là đường thẳng qua A song song với BC. Đường thẳng JD cắt d, BC lần lượt tại $L,\ H$.

a) Chứng minh: E, F, L thẳng hàng.

b) $JA,\ JF$ cắt BC lần lượt tại $M,\ K$. Chứng minh: $MH=MK$.

Câu 6. $(1,0$ *điểm*$)$

Tìm tất cả các số nguyên dương x, y thỏa mãn phương trình: $3^x-y^3=1$

HẾT.

ĐÁP ÁN

Câu 1. $(1,0$ *điểm*)

> Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}=2020$.
>
> Tính giá trị của biểu thức: $P=\left(\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b^2}{c+a}+\dfrac{c^2}{a+b}\right):\ a+b+c$.

Giải.

$$P=\left(\frac{a^2}{b+c}+a+\frac{b^2}{c+a}+b+\frac{c^2}{a+b}+c-(a+b+c)\right):\ a+b+c$$

$$=\left[\frac{a(a+b+c)}{b+c}+\frac{b(a+b+c)}{c+a}+\frac{c(a+b+c)}{a+b}-(a+b+c)\right]:(a+b+c) \qquad (0{,}5)$$

$$=\left[2020(a+b+c)-(a+b+c)\right]:(a+b+c)=2019 \qquad (0{,}5)$$

Câu 2. $(2,5$ *điểm*)

> **a)** Giải phương trình: $\sqrt{2x^2+x+9}+\sqrt{2x^2-x+1}=x+4 \quad (*)$

Giải.

<u>TH1</u>: $\sqrt{2x^2+x+9}=\sqrt{2x^2-x+1} \Leftrightarrow x=-4$ (không thỏa (*)) (0,25)

<u>TH2</u>: $\sqrt{2x^2+x+9}\neq\sqrt{2x^2-x+1}$

(*)$\Leftrightarrow 2x+8=(x+4)\ \sqrt{2x^2+x+9}-\sqrt{2x^2-x+1}$ (0,25)

$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2+x+9}-\sqrt{2x^2-x+1}=2 \quad (**)$

Từ (*) và (**) suy ra $2\sqrt{2x^2+x+9}=x+6$

(0,25) $\Rightarrow 8x^2+4x+36=x^2+12x+36 \Rightarrow 7x^2-8x=0 \Rightarrow x=0 \vee x=\dfrac{8}{7}$

Thử lại ta được hai nghiệm: $x=0 \vee x=\dfrac{8}{7}$ (0,25)

> **b)** Giải hệ phương trình : $\begin{cases} y^2-2xy=8x^2-6x+1 \\ y^2=x^3+8x^2-x+1 \end{cases}$

Giải.

$$\begin{cases} y^2-2xy=8x^2-6x+1 \\ y^2=x^3+8x^2-x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2=(3x-1)^2 \\ y^2=x^3+8x^2-x+1 \end{cases}$$

(0,25)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y=3x-1 \\ y^2=x^3+8x^2-x+1 \end{cases} (\mathrm{I}) \vee \begin{cases} x-y=-3x+1 \\ y^2=x^3+8x^2-x+1 \end{cases} (\mathrm{II}) \qquad (0{,}25)$$

Giải (I): $\begin{cases} x-y=3x-1 \\ y^2=x^3+8x^2-x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-2x \\ (1-2x)^2=x^3+8x^2-x+1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=1-2x \\ x^3+4x^2+3x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-3 \\ y=7 \end{cases}$ (0,5)

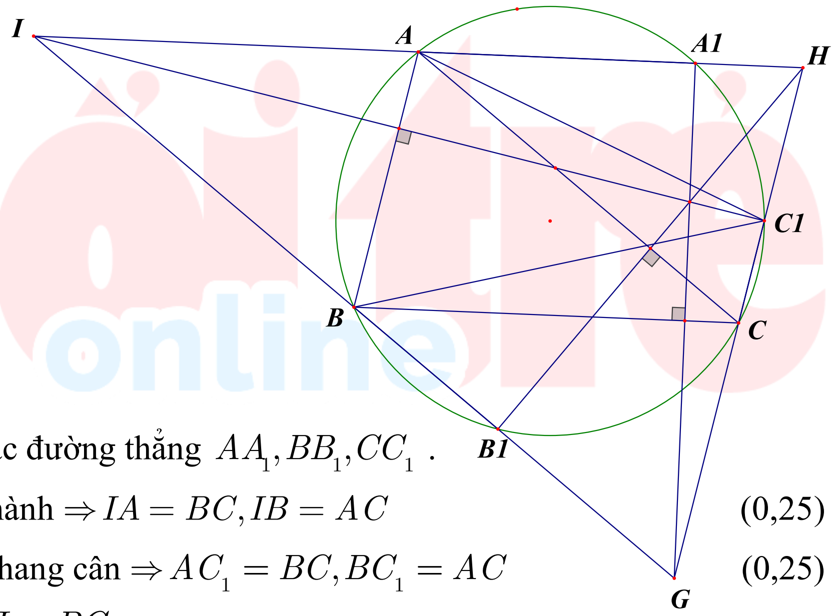
Giải (II): $\begin{cases} x-y=-3x+1 \\ y^2=x^3+8x^2-x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4x-1 \\ (4x-1)^2=x^3+8x^2-x+1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=4x-1 \\ x^3-8x^2+7x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases} \vee \begin{cases} x=7 \\ y=27 \end{cases}$ (0,5)

Câu 3. ($1,5$ *điểm*)

Cho tam giác nhọn ABC $(AB<BC<CA)$ nội tiếp đường tròn (O). Từ A kẻ đường thẳng song song với BC cắt (O) tại A_1. Các điểm B_1, C_1 được xác định tương tự. Chứng minh rằng các đường thẳng qua A_1, B_1, C_1 lần lượt vuông góc với BC, CA, AB đồng quy.

Giải.



Gọi I, H, G là giao điểm các đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1 .

Ta có $AIBC$ là hình bình hành $\Rightarrow IA=BC, IB=AC$ (0,25)

Mặt khác $ABCC_1$ là hình thang cân $\Rightarrow AC_1=BC, BC_1=AC$ (0,25)

Từ đó suy ra $AI=AC_1, BI=BC_1$

$\Rightarrow$ AB là trung trực của IC_1 $\Rightarrow$ $IC_1 \perp GH$ (0,5)

Chứng minh tương tự ta có $GA_1 \perp IH$, $HB_1 \perp IG$ (0,25)

Suy ra GA_1, HB_1, IC_1 đồng quy. (0,25)

Câu 4. ($2,0$ *điểm*)

a) Cho 2 số thực a,b. Chứng minh rằng: $\dfrac{a^2+b^2}{2} \ge ab + \dfrac{(a-b)^2}{a^2+b^2+2}$

Giải.

$\dfrac{a^2+b^2}{2} \ge ab + \dfrac{(a-b)^2}{a^2+b^2+2}$

$\Leftrightarrow (a-b)^2\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{a^2+b^2+2}\right]\geq 0$

(0,5)

$\Leftrightarrow \frac{(a-b)^2(a^2+b^2)}{2(a^2+b^2+2)}\geq 0$ (Đúng với mọi a,b) (0,5)

b) Cho hai số dương a,b thỏa mãn điều kiện $a+b\leq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $Q=b-a+\frac{20}{a}+\frac{7}{b}$

Giải.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho các số dương ta có:

$5a+\frac{20}{a}\geq 2\sqrt{5a.\frac{20}{a}}=20$

(0,25)

$7b+\frac{7}{b}\geq 2\sqrt{7b.\frac{7}{b}}=14$ (0,25)

Mà $-6a-6b\geq -18$ (vì $a+b\leq 3$) (0,25)

Do đó: $Q=b-a+\frac{20}{a}+\frac{7}{b}\geq 16$

Dấu "$=$" xảy ra $\Leftrightarrow a=2;\ b=1$

Vậy giá trị nhỏ nhất của Q là 16 khi $a=2; b=1$ (0,25)

<u>Cách 2</u> : Do $a,b>0$ và $a+b\leq 3\Rightarrow -a\geq b-3\wedge \frac{20}{a}\geq\frac{20}{3-b}>0$

Do đó : $Q\geq 2b-3+\frac{20}{3-b}+\frac{7}{b}=\frac{20}{3-b}+5(3-b)+\frac{7}{b}+7b-18$ (0,25)

$\frac{20}{3-b}+5(3-b)\geq 2.\sqrt{100}=20$ (0,25)

$\frac{7}{b}+7b\geq 2.\sqrt{49}=14$ (0,25)

Do đó $Q\geq 20+14-18=16$

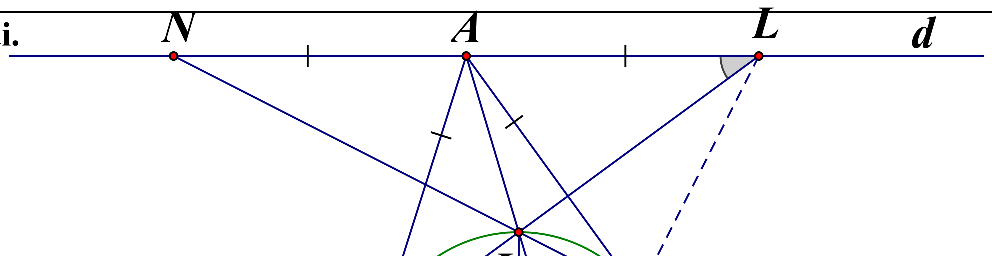
Dấu "$=$" xảy ra $\Leftrightarrow b=1\Rightarrow a=2$

Vậy giá trị nhỏ nhất của Q là 16 khi $a=2; b=1$ (0,25)

Câu 5. (2,0 *điểm*)

Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh $AB,\ BC, CA$ lần lượt tại D, E, F. Kẻ đường kính EJ của đường tròn (I). Gọi d là đường thẳng qua A song song với BC. Đường thẳng JD cắt $d,\ BC$ lần lượt tại $L,\ H$. a) Chứng minh: E, F, L thẳng hàng. b) $JA,\ JF$ cắt BC lần lượt tại $M,\ K$. Chứng minh: $MH=MK$.

Giải.



a) Chứng minh rằng : E, F, L thẳng hàng.

Ta có $JDE = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) và $JEH = 90^o$

$\Rightarrow JED = JHE$

Mà $JED = ADL$ (cùng chắn cung JD) và $JHE = ALD$ (so le trong)

Suy ra $ALD = ADL \Rightarrow \Delta ADL$ cân tại A
(0,25)
$\Rightarrow AL = AD$
Mà $AD = AF$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)
Do đó: $AL = AD = AF$

Ta có : $AFL = \dfrac{180^o - FAL}{2}$ (ΔAFL cân tại A)

và $CFE = \dfrac{180^o - FCE}{2}$ (ΔEFC cân tại C) (0,25)

Mà $LAF = FCE$ (so le trong) (0,25)

$\Rightarrow AFL = CFE \Rightarrow L, F, E$ thẳng hàng. (0,25)
b) Gọi N là giao điểm của JK và đường thẳng d.
Chứng minh tương tự câu a) ta được $AN = AF = AD$
Suy ra $AN = AL$ (1) (0,25)

Vì d song song HK nên $\begin{cases} \dfrac{NA}{MK} = \dfrac{JA}{JM} \\ \dfrac{LA}{MH} = \dfrac{JA}{JM} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{NA}{MK} = \dfrac{LA}{MH}$ (2)

(0,5)
Từ (1) và (2), suy ra $MH = MK$ (0,25)

Câu 6. (1,0 *điểm*)

Tìm tất cả các số nguyên dương x, y thỏa mãn phương trình: $3^x - y^3 = 1$

Giải. $3^x - y^3 = 1 \Rightarrow 3^x = y + 1 \quad y^2 - y + 1$

$\Rightarrow$ tồn tại $m, n \in N$ sao cho $\begin{cases} y+1 = 3^m \\ y^2 - y + 1 = 3^n \\ m+n = x \end{cases}$

(0,25)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3^m - 1 \\ 9^m - 3.3^m + 3 = 3^n \\ m + n = x \end{cases}$$

+) nếu $m = 0$ thì $y = 0$ và $x = 0$ (loại)

+) nếu $m > 0$ thì $\begin{cases} 9^m - 3.3^m + 3 \vdots 3 \\ 9^m - 3.3^m + 3 \not\vdots 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^n \vdots 3 \\ 3^n \not\vdots 9 \end{cases} \Rightarrow n = 1$ (0,5)

$\Rightarrow y = 2 \Rightarrow m = 1 \Rightarrow x = 2$

Thử lại ta được $x = 2, y = 2$ thỏa mãn phương trình. (0,25)